

Verkennen van Bayesiaanse statistiek met de BayesDemo Shiny App

Terugkomdag Belastingdienst 18 november 2025

Ferry Geertman & Koen Derks

Introductie

In de Bayesiaanse statistiek combineer je bestaande kennis (de prior-verdeling) met nieuwe waarnemingen (de data) om tot geüpdatete kennis te komen (de posterior-verdeling). De *BayesDemo* Shiny App laat je dit proces stap voor stap ervaren. Je gaat experimenteren met verschillende prior-verdelingen, aantallen fouten en steekproefgroottes, en direct zien hoe de posterior-verdeling zich aanpast aan de data. Daarnaast kun je een prior-verdeling specificeren op basis van verschillende soorten data-analyses.

👉 Open de app op <http://koenderks.shinyapps.io/BayesDemo/> of draai het bestand *BayesDemo-shiny.R* lokaal in een R-sessie.

Opdracht 1 – De beta(1, 1)-prior en interpretatie van de posterior

In deze eerste opdracht bouw je intuïtie op over hoe Bayesiaanse schattingen werken.

- 1.1) Kies onder *Instellingen voor de prior-verdeling* een beta-prior met parameters $\alpha = 1$ en $\beta = 1$. Hoe interpreteer je deze prior-verdeling in termen van voorinformatie?

elke foutfractie is even waarschijnlijk; je hebt geen positieve voorinformatie omtrent de foutfractie

- 1.2) Stel de betrouwbaarheid in op 95% en de materialiteit op 5%. Stel bij *Gegevens uit de steekproef* de steekproefgrootte in op 60 en het aantal fouten op 0. Wat is de meest waarschijnlijke foutfractie op basis van deze prior en deze gegevens? Waarom ligt deze waarde daar?
- de meest waarschijnlijke foutfractie bedraagt 0. Je hebt geen voorinformatie, je verkrijgt je informatie alleen uit de steekproef.

- 1.3) Bekijk de kansmassa boven en onder de materialiteit. Hoe interpreteer je deze waarden? Is een steekproef van 60 waarnemingen voldoende om de populatie goed te keuren bij 0 fouten? Waarom wel of niet?

de waarschijnlijkheid of de werkelijke foutfractie boven of onder materialiteit ligt

ja, is voldoende. de kansmassa onder de materialiteit is groter dan 95%, de gekozen betrouwbaarheid

- 1.4) Verlaag de materialiteit naar een percentage naar keuze (bijvoorbeeld van 5% naar 3%). Wat is het effect hiervan op de kansmassa boven en onder de materialiteit?

de kansmassa onder de materialiteit neemt af

- 1.5) Vergroot de steekproefgrootte met een door jou gekozen aantal. Hoeveel punten zijn nodig om de populatie goed te kunnen keuren? Wat is de 95% bovengrens in dat geval?

98; de bovengrens is dan 2,98%

- 1.6) Stel het aantal fouten in op 1. Wat gebeurt er met de posterior-verdeling en met de bovengrens? Hoeveel posten heb je nu nodig om de populatie goed te kunnen keuren?

je hebt dan 156 posten nodig

- 1.7) Verlaag de betrouwbaarheid (bijvoorbeeld van 95% naar 90%). Wat is het effect hiervan op de bovengrens? Hoe beïnvloedt dit het aantal benodigde posten voor goedkeuring?

de bovengrens wordt lager; je hebt dan 127 waarnemingen nodig

Opdracht 2: Effect van de prior-verdeling

In het artikel [*Toepassing van data-analyse om de steekproef te rationaliseren*](#) wordt beschreven hoe een steekproefreductie kan worden verwerkt in de prior-verdeling. Dit kan door de β -parameter van de beta-prior te verhogen met de reductie in steekproefgrootte.

- 2.1) Stel de betrouwbaarheid en materialiteit in op realistische waarden voor een controle die jij zelf uitvoert. Hoeveel posten zijn nodig om de populatie goed te keuren bij 0 fouten?

zelf doen

- 2.2) In het [*Handboek Controle Belastingdienst*](#) (sectie 11.3.3, p. 159) staat dat de steekproef met 75% kan worden gereduceerd als er sprake is van 'Opzet en bestaan van de interne beheersing' en er 25 dual-purpose tests worden uitgevoerd. Met hoeveel waarnemingen kun je de steekproef uit opdracht 2.1 hiermee reduceren?

zelf doen

- 2.3) Verhoog de β -parameter van de beta prior-verdeling tot $1 +$ het aantal waarnemingen dat je in opdracht 2.2 hebt gereduceerd. Wat is het effect van deze aanpassing op de prior-verdeling? Hoeveel posten zijn nu nodig om de populatie goed te keuren met deze aangepaste prior? Kun je dit aantal verklaren?

de prior verdeling schuift naar links; $n - \beta + 1$ waarnemingen heb je nodig

- 2.4) Stel dat je nu 1 fout vindt in de steekproef, waardoor je niet kunt goedkeuren. Met hoeveel extra posten moet je de steekproef uitbreiden om alsnog te kunnen goedkeuren?

zelf doen

In het artikel wordt ook een manier besproken om de vooraf ingeschatte kans (K) dat de afwijking in de populatie de materialiteit (M) overschrijdt (met andere woorden: de kans op een materiële fout) mee te nemen in de prior-verdeling. Bij een nulfoutenverwachting kan dat door de β -parameter van de prior-verdeling in te stellen op $\beta = \frac{\ln(K)}{\ln(1-M)}$.

- 2.5) Stel dat je de kans op een materiële fout inschat op $\frac{1}{2}$. Wat wordt in dat geval de waarde van de β -parameter bij de door jou gekozen materialiteit? Stel deze waarde in. Hoe zou je de prior-verdeling die daaruit volgt interpreteren?

bij materialiteit van 5% is de beta parameter 13,5. de kans op een materiele fout schat ik in op 50%

- 2.6) Hoe veel posten heb je met deze prior-verdeling nodig om de populatie goed te kunnen keuren bij 0 fouten? En bij 1 fout?

45 bij 0 fout ; 80 bij 1 fout

Opdracht 3: Prior-verdeling op basis van de resultaten van regressie-analyse

In voorbeeld 1 van het artikel [*Toepassing van data-analyse om de steekproef te rationaliseren*](#) wordt beschreven hoe resultaten van een regressieanalyse kunnen worden verwerkt in de prior-verdeling. Dit kan bijvoorbeeld door een voorspelling te maken van de omzet van de auditee op basis van benchmarkgegevens van vergelijkbare ondernemingen en de directe kosten van de auditee. Vervolgens kan de afwijking van deze voorspelling worden gekwantificeerd.

- 3.1) Navigeer naar het tabblad 'Regressie' in de applicatie. In de eerste figuur worden de benchmarkgegevens weergegeven met grijze punten. De voorspelde omzet is rood gekleurd en de opgevoerde omzet blauw. Linksonder in deze figuur is de verdeling van de voorspelde omzet weergegeven (aangezien dit een Bayesiaanse analyse betreft). Wat is de meest waarschijnlijke waarde voor de voorspelde omzet? Bereken vervolgens de meest waarschijnlijke afwijking van de opgevoerde omzet (voorspeld minus opgevoerd) en deel deze afwijking door de opgevoerde omzet. Wat is de meest waarschijnlijke foutfractie? Geef tenslotte aan in welke figuur in de applicatie deze waarde zichtbaar is.

2.200.000	$2.250.000 - 2.200.000 = 50.000$	$50.000 / 2.250.000 = 2,22\%$
-----------	----------------------------------	-------------------------------

- 3.2) Wat is de uiteindelijke vorm van de prior-verdeling op basis van de resultaten van de regressie? Klik op → *Gebruik prior-verdeling* om deze verdeling toe te passen bij de evaluatie van de steekproef. Wat is de 95% bovengrens van de foutfractie met deze prior-verdeling? Hoeveel posten heb je minimaal nodig om goed te kunnen keuren bij een materialiteit van 4%? Vergelijk de uitkomst met het resultaat dat zou zijn verkregen bij gebruik van de beta(1, 1) prior-verdeling. Wat is de winst die met de nieuwe prior-verdeling is behaald?
de Student t-verdeling met parameters 0.0227, 0.0129 en 98, de bovengrens is 4,4%

je hebt nog 26 waarnemingen nodig

- 3.3) Verhoog onder *Benchmarkgegevens* de spreiding naar een hoger, door jou gekozen getal en observeer het effect op de verdeling van de voorspelling van de omzet van de auditee. Ben je hierdoor zekerder of onzekerder geworden over deze voorspelling? Wat is het effect van meer spreiding in de gegevens op de vorm van de prior-verdeling (de figuur rechtsonder in de applicatie)?

onzekerder; de prior wordt 'breder', schuift naar rechts

- 3.4) Klik opnieuw op → *Gebruik prior-verdeling* om de nieuwe prior-verdeling toe te passen. Zijn er nu meer of minder posten nodig zijn om de 95% bovengrens onder de materialiteit van 4% te krijgen dan bij de vorige prior-verdeling?

(veel) meer posten nodig

- 3.5) Pas enkele instellingen, zoals de beginwaarde van de toevalsgenerator, het aantal datapunten, de spreiding in de gegevens of de omzet van de auditee, aan naar een zelfgekozen getal en bepaal opnieuw de benodigde steekproefgrootte. Kun je de efficiëntiewinst die hieruit voortkomt opnieuw kwantificeren?

zelf doen

- 3.6) Denk je dat deze techniek altijd leidt tot een efficiëntiewinst? Zo niet, in welke situaties zou je juist meer werk moeten verrichten?

nee , niet altijd. bij veel spreiding meer werk; en als de gerapporteerde omzet veel afwijkt van de voorspelling

- 3.7) Welke afwegingen zou jij maken als je deze techniek in de praktijk zou willen toepassen?

zelf over nadenken

Opdracht 4: Prior-verdeling op basis van de resultaten van classificatie-analyse

In voorbeeld 2 van het artikel [*Toepassing van data-analyse om de steekproef te rationaliseren*](#) wordt beschreven hoe resultaten van een classificatieanalyse kunnen worden verwerkt in de prior-verdeling. Dit kan bijvoorbeeld door voor elke ongeziene post een foutkans te voorspellen en daar vervolgens een prior-verdeling op te baseren.

- 4.1) Navigeer naar het tabblad 'Classificatie' in de applicatie. In de bovenste twee figuren zie je de trainingsset en de testset (beide gecontroleerd door een interne auditor), waarbij rode punten foutieve posten en groene punten correcte posten voorstellen. In de middelste figuur zie je de posten in de nog te controleren populatie. De kleuren geven aan wat de voorspelling is voor elke mogelijke combinatie van de twee kenmerken verwerkingstijd en controleintensiteit. Welke combinatie van kenmerken resulteert in de voorspelling 'Fout'? Kun je verklaren waarom het classificatie-algoritme juist voor deze combinatie van kenmerken de uitkomst 'Fout' voorspelt?

- 4.2) De voorspellingen van het algoritme zijn geen harde uitspraken, maar geven voor elke post een kans op 'Fout' en een kans op 'Niet fout'. Linksonder in de applicatie zie je een figuur met een histogram van deze voorspelde foutkansen voor de ongeziene posten in de populatie. Wat valt je op aan deze figuur? Zou je zeggen dat de meeste posten een lage of een hoge foutkansen hebben? En wat betekent dit intuïtief voor de hoeveelheid werk die je zou moeten verrichten bij een controle?

- 4.3) Rechtsonder in de applicatie zie je de beta verdeling die aansluit op deze voorspelde foutkansen. Hoe komt de intuïtie uit de vorige vraag tot uiting in de vorm van deze prior-verdeling? Klik op → *Gebruik prior-verdeling* om deze prior-verdeling te gebruiken bij het evalueren van de steekproef. Hoeveel posten zijn er nodig om de 95% bovengrens onder een materialiteit van 5% te krijgen? En hoe verhoudt dit resultaat zich tot het gebruik van de beta(1, 1) prior-verdeling? Wat is de winst die met deze prior-verdeling wordt behaald?

-
-
-
- 4.4) Stel de steekproefgrootte in op het aantal dat gewoonlijk nodig is voor een materialiteit van 5% en gebruik de prior-verdeling die is afgeleid uit de classificatie-analyse. Hoeveel zekerheid (kansmassa onder de materialiteit) verkrijgt je hiermee dat er geen materiële fout in de populatie aanwezig is? En wat is de maximale waarde van de materialiteit waarbij je met deze steekproef en deze voorkennis nog kunt goedkeuren?

-
-
-
- 4.5) Pas enkele instellingen, zoals de beginwaarde van de toevalsgenerator of het aantal posten in de populatie, aan naar een zelfgekozen getal en bepaal opnieuw de benodigde steekproefgrootte. Kun je de efficiëntiewinst die hieruit voortkomt opnieuw kwantificeren?

-
-
-
- 4.6) Denk je dat deze techniek altijd leidt tot een efficiëntiewinst? Zo niet, in welke situaties zou je juist meer werk moeten verrichten?

-
-
-
- 4.7) Welke afwegingen zou jij maken als je deze techniek in de praktijk zou willen toepassen?

Opdracht 5: Reflectie (optioneel)

- 5.1) Wat heb je vandaag geleerd over de mogelijkheden van Bayesiaanse statistiek in de audit?

-
-
-
- 5.2) Welke voordelen zie je voor toepassing binnen de Belastingdienst?

Opdracht 6: Bayesiaanse statistiek in Excel

Je hebt de BayesDemo Shiny-app niet per se nodig om Bayesiaanse statistiek toe te passen; je kunt dit ook in Excel doen. In deze opdracht ga je hiermee aan de slag.

- 6.1) Open een leeg Excel-bestand en voer de volgende formule in:

=BETA.INV(0,95; 1 + 0; 1 + 60 - 0; 0; 1)

Deze formule berekent de 95% bovengrens voor een steekproef van 60 posten met 0 fouten, uitgaande van een beta(1, 1) prior-verdeling. Wat is de berekende bovengrens?

4,79%

- 6.2) Wat representeren de kleuren in de bovenstaande formule? Kies uit steekproefgrootte, aantal fouten, alfa-parameter, betrouwbaarheid, beta-parameter.

Blauw: betrouwbaarheid
Oranje: alfa parameter
Rood: aantal fouten
Paars: beta parameter
Groen: steekproefgrootte

- 6.3) Voer in een nieuwe cel de volgende formule in:

=BETA.VERD(0,05; 1 + 0; 1 + 60 - 0; WAAR; 0; 1)

Dit geeft de kansmassa onder een materialiteit van 5%, gegeven een steekproef van 60 posten met 0 fouten en een beta(1, 1) prior-verdeling? Wat is deze kansmassa? Wat is dan de kansmassa boven de materialiteit?

95,62 % onder de materialiteit en dus 4,38% er boven

- 6.4) Wat representeren de kleuren in de bovenstaande formule? Kies uit aantal fouten, alfa-parameter, materialiteit, steekproefgrootte, beta-parameter.

Blauw: materialiteit
Oranje: alfa parameter
Rood: aantal fouten
Paars: beta parameter
Groen: steekproefgrootte

- 6.5) Bereken nu zelf voor een steekproef van 300 posten met 0 fouten en een beta(1, 1) prior-verdeling de 95% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 1%. Wat zijn de resultaten? Kun je de populatie goedkeuren?

bovengrens 0,99%

95,14% onder materialiteit en 4,86% erboven

- 6.6) Bereken nu zelf voor een steekproef van 150 posten met 1 fout en een beta(1, 1) prior-verdeling de 99% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 3%. Wat zijn de resultaten? Kun je de populatie goedkeuren?

bovengrens 4,32%

kansmassa onder materialiteit is 94,3% en erboven 5,7%

nee, niet goed te keuren

👉 Open het Excel-bestand *BayesDemo-Excel.xlsx* door het volgende [.zip-bestand](#) uit te pakken.

- 6.7) Herhaal opdracht 6.5 en 6.6 met het Excel-bestand. Verkrijg je dezelfde resultaten?

zelf doen

- 6.8) Bereken voor een steekproef van 200 posten met 2 fouten en een $\text{beta}(1, 1)$ prior-verdeling de 95% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 4%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

95% bovengrens bedraagt 3,1%	Kansmassa onder materialiteit bedraagt 98,79% en erboven 1,21%
------------------------------	--

Ja, goedkeuren kan

- 6.9) Bereken voor een steekproef van 120 posten met 0 fouten en een $\text{beta}(1, 1)$ prior-verdeling de 99% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 2%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

99% bovengrens bedraagt 3,73%	kansmasse onder materialiteit bedraagt 91,32% en erboven 8,68%
-------------------------------	--

Nee, niet goedkeuren

- 6.10) Bereken voor een steekproef van 180 posten met 3 fouten en een $\text{beta}(2, 2)$ prior-verdeling de 90% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 5%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

vanaf hier zelf doen

- 6.11) Bereken voor een steekproef van 250 posten met 1 fout en een $\text{beta}(1, 1)$ prior-verdeling de 95% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 3,5%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

- 6.12) Bereken voor een steekproef van 300 posten met 4 fouten en een $\text{beta}(1, 1)$ prior-verdeling de 99% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 6%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

- 6.13) Bereken voor een steekproef van 100 posten met 0 fouten en een $\text{beta}(1, 1)$ prior-verdeling de 90% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 1,5%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

- 6.14) Bereken voor een steekproef van 220 posten met 2 fouten en een $\text{beta}(2, 2)$ prior-verdeling de 95% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 4,5%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

- 6.15) Bereken voor een steekproef van 160 posten met 1 fout en een $\text{beta}(1, 1)$ prior-verdeling de 99% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 2,5%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

- 6.16) Bereken voor een steekproef van 140 posten met 3 fouten en een $\text{beta}(1, 1)$ prior-verdeling de 95% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 3%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

- 6.17) Bereken voor een steekproef van 190 posten met 0 fouten en een $\text{beta}(1, 1)$ prior-verdeling de 99% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 2%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

- 6.18) Bereken voor een steekproef van 150 posten met 1 fout en een $\text{beta}(1, 20)$ prior de 99% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 3%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

- 6.19) Bereken voor een steekproef van 200 posten met 2 fouten en een $\text{beta}(1, 30)$ prior de 95% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 4%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

- 6.20) Bereken voor een steekproef van 180 posten met 3 fouten en een $\text{beta}(3, 25)$ prior de 90% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 5%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

- 6.21) Bereken voor een steekproef van 220 posten met 0 fouten en een $\text{beta}(2, 35)$ prior de 99% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 2,5%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?

- 6.22) Bereken voor een steekproef van 175 posten met 0 fouten en een $\text{beta}(1, 3)$ prior de 90% bovengrens en de kansmassa boven en onder een materialiteit van 2,8%. Wat zijn de uitkomsten en kun je de populatie op basis daarvan goedkeuren?
